PARAGRAAF 5.2 : SPAN EN ORTHOGONAAL COMPLEMENT

LES 1 : BASIS, SPAN EN DIMENSIE

THEORIE

- Basis = { een stelsel van onafhankelijke vectoren die deze ruimte opspannen }
- Dimensie = { aantal onafhankelijke vectoren in de ruimte }
- Sp(A) = { span(A) } = { een aantal vectoren die de ruimte opspannen }

BEPALEN VAN DE BASIS (VECTOREN)

(1) Los het stelsel $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

(2) Als er geen vrije variabele zijn, dan vormen alle vectoren $v_1, \dots, v_n$ de basis (en zijn ze dus allemaal onafhankelijk

(3) Als er vrije variabelen zijn, vallen deze vectoren af in de basis. Ze zijn overbodig.

OPMERKING

Oplossen van stelsel vanaf nu alleen maar via de echelon vorm !!

VOORBEELD 1

Bepaal de basis en de dimensie voor de deelruimte V opgespannen door de vectoren $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ $en\, r = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

OPLOSSING 1

We lossen op

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\6\\7\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-4\\-2\\6\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}\alpha-3\beta-4\gamma=0\\-4\alpha+6\beta-2\gamma=0 & +4R1\\-3\alpha+7\beta+6\gamma=0 & +3R1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha-3\beta-4\gamma=0\\-6\beta-18\gamma=0\\-2\beta-6\gamma=0 & +3R3-R2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha-3\beta-4\gamma=0 & \rightarrow \alpha=3\beta+4\gamma=-5\gamma\\-6\beta-18\gamma=0 & \rightarrow \beta=-3\gamma\\0=0\end{cases}$$

Dus de vector met γ is overbodig (vrije variabele).

Dus :

$$Basis(V)= sp<p,q>=sp<\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\6\\7\end{pmatrix}>$$

$Dim(V)=2$ (er zijn 2 onafhankelijke vectoren).

OPMERKING

De vector r is uit te drukken in p en q en is daarom overbodig.

LES 2 : ORTHOGONAAL COMPLEMENT

THEORIE

- Orthogonaal complement van V = { loodrechte ruimte op V }
- $V^{\perp}$ = {Orthogonaal complement }
- (a, b) = { inproduct van a en b } = $a \cdot b$

VOORBEELD 2

De deelruimte V wordt opgespannen door de vectoren $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $r = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Bepaal het orthogonale complement $V^{\perp}$

OPLOSSING 2

We weten uit voorbeeld 1, dat $Basis(V) = sp < \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} >$

Het orthogonale complement is/zijn die vector(en) die loodrecht op V staat/staan.

Neem $t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Er moet nu gelden dat

1. $(p, t) = 0$ dus $x - 4y - 3z = 0$

2. $(q, t) = 0$ dus $-3x + 6y + 7z = 0$

$$\begin{cases} x - 4y - 3z = 0 \\ -3x + 6y + 7z = 0 \quad +3R1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y - 3z = 0 & \rightarrow x = 4y + 3z = \frac{5}{3}z \\ -6y - 2z = 0 & \rightarrow y = -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

Dus de oplossing is de vector $t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}z \\ -\frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dus $V^{\perp} = sp < \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} >$

OPLOSSING 2 (ALTERNATIEF, LUKT SOMS)

Je wil de loodrechte projectie van twee richtingsvectoren p en q weten. Maar dat is de definitie van het uitproduct ("Amsterdammertje"). Dus het kan, in dit geval, ook zo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \\ -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 + 18 \\ 9 - 7 \\ 6 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

PARAGRAAF 5.5 : KERN EN BEELD

THEORIE KERN

(1) Ker(A) = { De **kern** van matrix A }

(2) Je kunt de kern van A bereken, door Ax = 0 op te lossen.

(3) $Ker\ (A) = \{\ x \in \mathbb{R}^n |\ Ax = 0\ \}$

(4) De kern van een matrix wordt ook wel de Nulruimte (Null) genoemd

(5) Null(A) = Ker(A)

THEORIE BEELDRUIMTE

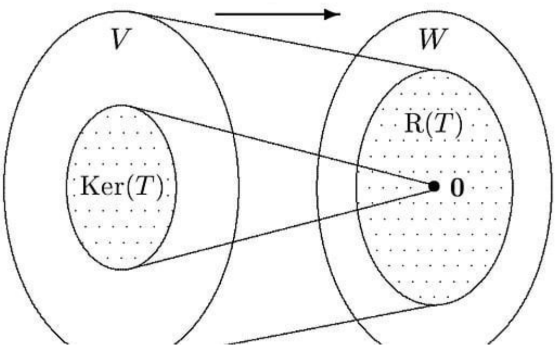
(1) R(A) = { beeldruimte van A } = { alle mogelijke uitkomsten }

(2) R(A) komt van “Range”

(3) $R(A) = \{\ x \in \mathbb{R}^n\ \ \wedge\ y \in \mathbb{R}^m\ |\ Ax = y\ \}$

(4) Soms wordt R(A) ook Im(A) genoemd (image)

PLAATJE $\mathbb{R}^n$ A [MxN] $\mathbb{R}^m$



THEORIE DIMENSIESTELLING

Als A = [m x n]-matrix dan geldt de dimensiestelling :

$$\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})) + \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{A})) = \boldsymbol{n}$$

VOORBEELD 1

Gegeven $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

a. Bereken Ker(A) en R(A)

b. Controleer of de dimensiestelling klopt.

OPLOSSING 1

a. We berekenen dit in twee delen :

We bepalen eerst Ker(A), waarvoor geldt $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \\ 2x + y - z = 0 & -2R1 \\ x + 5y + 4z = 0 & -R1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \\ -3y - 3z = 0 & \\ 3y + 3z = 0 & +R2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & x = -2y - z = z \\ -3y - 3z = 0 & y = -z \\ 0 = 0 & \end{cases}$$

Dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus

$$\boxed{Ker(A) = sp < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >}$$

Nu R(A) bepalen.

Omdat in Ker(A) de variabelen z overblijft (de 3e kolom), zitten deze juist niet in R(A).

Dus R(A) bevat alleen de 1e en 2e kolom. Dus

$$R(A) = sp < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} >$$

b. Er geldt:

$$Ker(A) = 1 \ \ en \ R(A) = 2 \ en \ n = 3$$

Dus $Ker(A) + R(A) = 1 + 2 = 3 = n$

OPMERKING

Merk op dat als de kolommen allemaal onafhankelijk waren geweest, dan gelden de volgende regels :

- Kolommen zijn onafhankelijk
- $Ker(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $R(A) = sp < alle\ kolommen >$
- $Det(A) \neq 0$
- A heeft een inverse.

VOORBEELD 2

Gegeven $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 5 & -8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

a. Bereken Ker(A) en R(A)

b. Controleer of de dimensiestelling klopt.

OPLOSSING 2

a. We berekenen dit in twee delen :

We bepalen eerst Ker(A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 5 & -8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} v + 2w + 2x - 5y + 6z = 0 & \\ -v - 2w - x + y - z = 0 & +R1 \\ 4v + 8w + 5x - 8y + 9z = 0 & -4R1 \\ 3v + 6w + x + 5y - 7z = 0 & -3R1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v + 2w + 2x - 5y + 6z = 0 & \\ x - 4y + 5z = 0 & \\ -3x + 12y - 15z = 0 & +3R1 \\ -5x + 20y - 25z = 0 & +5R1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v + 2w + 2x - 5y + 6z = 0 & \rightarrow v = -2w - 2(4y - 5z) + 5y - 6z = -2w - 3y + 4z \\ x - 4y + 5z = 0 & \rightarrow x = 4y - 5z \\ 0 = 0 & \\ 0 = 0 & \end{cases}$$

Dus

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2w - 3y + 4z \\ w \\ 4y - 5z \\ y \\ z \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus

$$\boxed{Ker(A) = sp < \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Nu R(A) bepalen.

Omdat in Ker(A) de variabelen w,y en z overblijven (de 2e, 4e en 5e kolom), zitten deze juist niet in R(A).

Dus R(A) bevat alleen de 1e en 3e kolom. Dus

$$R(A) = sp < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

b. Er geldt:

$$Ker(A) = 3 \;\; en \; R(A) = 2 \; en \; n = 5$$

Dus $\quad Ker(A) \; + \; R(A) \; = \; 3 + 2 = 5 = n$

OPMERKING

- Merk op dat in dit voorbeeld $R(A) \in \mathbb{R}^4$ terwijl $Ker(A) \in \mathbb{R}^5$!!!!