PARAGRAAF 9.1 : DE VERWACHTINGSWAARDE

LES 1 VERWACHTINGSWAARDE

DEFINITIES : VERWACHTINGSWAARDE

- Verwachtingswaarde = { wat je verwacht } ≈ { gemiddelde }
- Verwachtingswaarde = ∑ (kans x waarde)
- Notatie : E(..)

VOORBEELD 1

De cijfers in klas 3A zijn :

Cijfer	Aantal
5	11
6	4
7	5
Totaal	**20**

a. Bereken het gemiddelde (gem=5,7)

b. Bereken de verwachtingswaarde

OPLOSSING 1

Cijfer	Aantal	Kans
5	11	$\frac{11}{20} = 0{,}55$
6	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$
7	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$
Totaal	20	1

a. $Gemiddelde = \frac{5\times 11+6\times 4+7\times 5}{20} = 5{,}7.$

b. **(1)** Bereken de kans (zie tabel)

(2) Bereken kans x waarde :

$E(Cijfer) = 0{,}55 \times 5 + 0{,}20 \times 6 + 0{,}25 \times 7$

$E(Cijfer) = 5{,}7$

OPMERKING

Je ziet dus dat het gemiddelde en de verwachtingswaarde (ongeveer) hetzelfde zijn.

VOORBEELD 2

Fin en Hin spelen een spel. Fin pakt 3 kaarten uit een stapel. Voor iedere harten krijgt hij een euro. De inzet voor dit spel is 1 euro.

a. Bereken de verwachte winst van dit spel voor Fin.

b. Bereken de inzet als het spel "eerlijk is".

OPLOSSING 2

a. Eerst de kansen berekenen :

P(0 Harten) = P(~~H~~ ~~H~~ ~~H~~) = $\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50} = 0{,}4135$

P(1 Harten) = P(H ~~H~~ ~~H~~) = $\frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50} \times \binom{3}{1} = 0{,}4359$

P(2 Harten) = P(H H ~~H~~) = $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{39}{50} \times \binom{3}{2} = 0{,}1376$

P(1 Harten) = P(H H H) = $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = 0{,}0129$

We zetten dit in een tabel :

Harten	Uitbetaling	Kans
0	0	0,4135
1	1	0,4359
2	2	0,1376
3	3	0,0129
	Som ≈	1

E(Uitbetaling) = 0,4135 x 0 + 0,4359 x 1 + 0,1376 x 2 + 0,0129 x 3 = 0,75

De inzet is 1 euro.

Dus Fin wint 0,75 – 1 = – 0,25 (dus 25 cent verlies per spel)

b. Als het eerlijk is dan is de winst 0. Dus de inzet is dan € 1 - € 0,25 = € 0,75.

OPMERKING

Je kunt ook direct de winst berekenen :

Harten	Uitbetaling	**Winst**	Kans
0	0	**-1**	0,4135
1	1	**0**	0,4359
2	2	**1**	0,1376
3	3	**2**	0,0129

E(Winst voor Fin) = 0,4135 x -1 + 0,4359 x 0 + 0,1376 x 1 + 0,0129 x 2 = -0,25

Dus Fin verliest € 0,25.

PARAGRAAF 9.2 : DE BINOMIALE VERDELING

LES 1 : BINOMPDF EN BINOMCDF

DEFINITIES BINOMIALE VERDELING

- Binomiale verdeling = { Een kansverdeling waar maar twee keuzes zijn }
  { Een wel-niet experiment }
- Binomiale verdeling gaat ALTIJD over VASTE kans / MET terugleggen.

BINOMIALE VERDELING OP DE GR

- Binomknop bij : distr (2nd Vars) > binompdf/cdf

- n = { Het aantal experimenten }
- p = { de kans op succes }
- k = { het aantal keren succes }

- $P(X = k)$ = binompdf(n,p,k) { p = precies }
- $P(X \leq k)$ = binomcdf(n,p,k) { c = cumulatief }

VOORBEELD 1

Suzy maakt een vierkeuzeproefwerk met 10 vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Bereken de kans dat :

a. Zij vier vragen goed gokt.

b. Zij hoogstens 3 vragen goed gokt.

c. Zij meer dan 5 vragen goed gokt.

d. Zij tussen de 3 en de 7 scoort.

Trudy weet 3 vragen zeker en gokt de rest.

e. Zij 6 punten haalt.

f. Zij minstens een 7 haalt.

OPLOSSING 1

Definieer eerst de toevalsvariabele. Dat maakt het opschrijven een stuk makkelijker.

X = {aantal vragen goed gegokt}

a. $P(X=4) = P(ggggffffff) = 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 \cdot \binom{10}{4} = 0{,}1460$

Dit kun je ook uitrekenen met de knop binompdf :
n = { Het aantal experimenten } = 10
p = { de kans op succes } = 0,25
k = { het aantal keren succes } = 4

$P(X=4) = binompdf(10{,}0.25{,}4) = 0{,}1460$

b. $P(X \leq 3) = binomcdf(10{,}0.25{,}3) = 0{,}7759$

c. $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - binomcdf(10{,}0.25{,}5) = 0{,}0197$

d. $P(3 < X < 7) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) =$
$binomcdf(10{,}0.25{,}6) - binomcdf(10{,}0.25{,}3) = 0{,}9965 - 0{,}7759 = 0{,}2206$

e. Nu is n = 7 en p = 0,25 (je weet drie vragen zeker dus die gok je niet). Voor een 6 moet ze drie vragen goed gokken :

$P(X=3) = binompdf(7{,}0.25{,}3) = 0{,}1730$

f. Voor een 7 moet ze minstens 4 vragen goed gokken
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - binomcdf(7{,}0.25{,}3) = 0{,}9294$

LES 2 VOOR WELKE N MET BINOMPDF/CDF

VOORBEELD 1

Vincent maakt een driekeuzeproefwerk met n vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Uit hoeveel vragen moet het proefwerk bestaan als

a. de kans dat zij 6 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,90.

b. de kans dat zij 8 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,97.

OPLOSSING 1

a. X = {aantal vragen goed gegokt} met N=n en p=$^1/_3$.

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - binomcdf\left(n, \frac{1}{3}, 5\right) > 0{,}90$$

GR : $Y_1 = 1 - binomcdf\left(X, \frac{1}{3}, 5\right)$

X	Y_1	
25	0,8881	te klein
26	0,9097	groot genoeg

Dus voor n ≥ 26

b. X = {aantal vragen goed gegokt} met N=n en p=$^1/_3$.

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - binomcdf\left(n, \frac{1}{3}, 7\right) > 0{,}97$$

GR : $Y_1 = 1 - binomcdf\left(X, \frac{1}{3}, 7\right)$

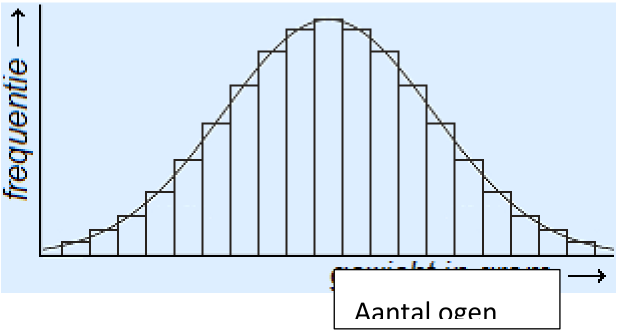
X	Y1	
38	0,9668	te klein
39	0,9735	groot genoeg

Dus voor n ≥ 39

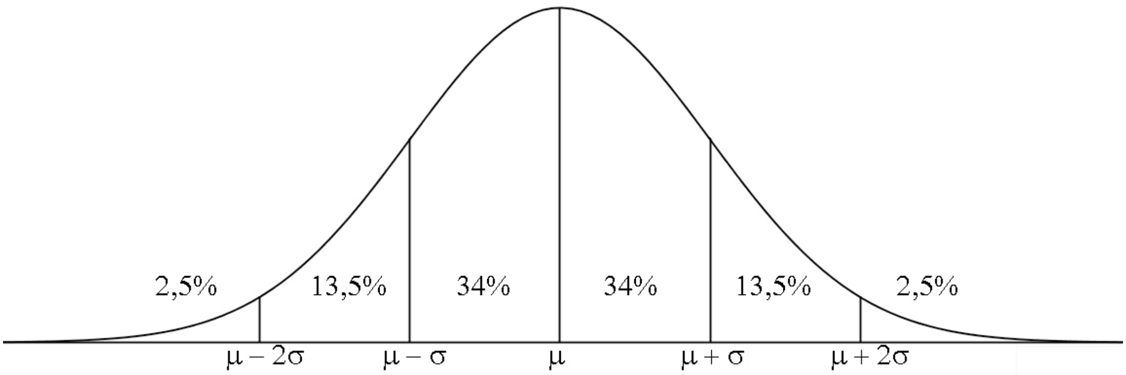
PARAGRAAF 9.3 NORMALE VERDELING

VOORBEELD 1

Je gooit met 2 dobbelstenen en kijkt naar de som. Als je de kansen in een staafdiagram weergeeft krijg je een soort normale verdeling / belvorm.



NORMALE VERDELING



Er geldt:

- Tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ zitten 68% van de waarden
- Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ zitten 95% van de waarden

VOORBEELD 2

In een flesje bier zit gemiddeld 30cl en de standaarddeviatie is 2 cl.

a. Bereken de kans dat in een flesje minder dan 28cl zit.
b. Bereken de kans dat in een flesje meer dan 34 cl zit.
c. Bereken de kans dat in een flesje tussen de 26 en 32cl zit.

OPLOSSING 2

a. X = {aantal cl in fles }
$P(X < 28) = 2{,}5\% + 13{,}5\% = 16\% = 0{,}16$
b. $P(X > 34) = 2{,}5\% = 0{,}025$
c. $P(26 < X < 32) = 13{,}5\% + 68\% = 81{,}5\% = 0{,}815$

PARAGRAAF 9.4 OPPERVLAKTEN ONDER NORMAALKROMMEN

LES 1 NORMALCDF EN INVNORM

DEFINITIES

- Bij de normale verdeling heb je altijd μ en σ nodig.
- Oppervlakte berekenen = Kans berekenen
- Kans berekenen : Normalcdf(linkergrens , rechtergrens , μ , σ)
- Knop normalcdf zit bij : distr (2nd vrs) > Normalcdf
- NOOIT normalPDF gebruiken.
- Om een grens uit te rekenen, gebruik je Invnom(linkergrens, , μ , σ)

VOORBEELD 1

In een flesje bier zit gemiddeld 30cl en de standaarddeviatie is 2 cl. De inhoud is normaal verdeeld.

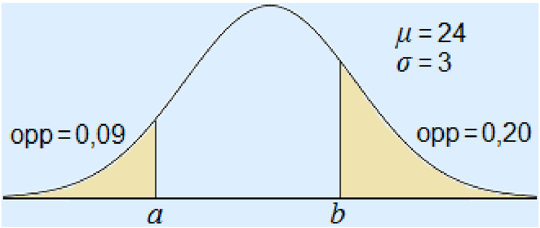
a. Bereken de kans dat in een flesje minder dan 27cl zit.
b. Bereken de kans dat in een flesje meer dan 29 cl zit.
c. Bereken de kans dat in een flesje tussen de 30 en 33 cl zit.

OPLOSSING 1

a. X = {aantal cl in fles }
P(X < 27) = normalcdf(-10^99, 27, 30, 2) = 0,0668
b. P(X > 29) = normalcdf(29, 10^99, 30, 2) = 0,6915
c. P(30 < X < 33) = normalcdf(30, 33, 30, 2) = 0,4332

VOORBEELD 2

Bereken de grenzen a en b.



OPLOSSING 2

(1) a = invNorm(0.09, 24, 3) ≈ 20,0

(2) Links van *b* zit een oppervlakte van 1 – 0,20 = 0,80
b = invNorm(0.80, 24, 3) ≈ 26,5

LES 2 σ,μ OF DE GRENS a BEREKEN

VOORBEELD 1

De hoeveelheid werkzame stof bij een tablet is normaal verdeeld met gemiddelde 10 milligram en de $\sigma = 0{,}5$ milligram.

a. Bereken de kans dat een tablet meer dan 11 gram werkzame stof bevat.
b. Bereken hoeveel milligram werkzame stof de laagste 15% bevat ?

Van een ander medicijn is bekend dat $\sigma = 0{,}5$ milligram en dat 8% meer dan 12 milligram bevat.

c. Bereken het gemiddelde.

Van weer een ander medicijn is bekend dat $\mu = 15$ milligram en dat 25% minder dan 12 milligram bevat.

d. Bereken σ.

OPLOSSING 1

a. X = { aantal milligram werkzame stof }
P(X > 11) = normalcdf(11, 10^99, 10, 0.5) = 0,0228

b. P(X > 11) = normalcdf(-10^99, X, 10, 0.5) = 0,15
Y_1= normalcdf(-10^99, X, 10, 0.5)
Y_2= 0,15
[0,10] x [0,0.5]
Intersect geeft X = 9,48
Dus 9,48 of minder

c. P(X > 11) = normalcdf(12, 10^99, X, 0.5) = 0,08
Y_1= normalcdf(12, 10^99, X, 0.5)
Y_2= 0,08
Intersect geeft X = 11,3 dus μ = 11,3

d. P(X > 11) = normalcdf(-10^99, 12, 15, X) = 0,25
Y_1= normalcdf(-10^99, 12, 15, X)
Y_2= 0,25
[0,15] x [0,0.5]
Intersect geeft X = 4,4 dus σ = 4,4

OPMERKING:

Het boek gebruikt ook invnorm maar dit is niet nodig.
Bij vraag b is het wel wat sneller :
a = invnorm (0,15,10,0.5) = 9,48